L'ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS

SESSION 1997

Filière MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 3 heures

Nota : Les six sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

1) a) Montrer que l'ensemble T des matrices à éléments complexes triangulaires inférieures (c'est–à–dire vérifiant $a_{i,j} = 0$ dès que $i < j$) est muni d'une structure d'algèbre pour les lois usuelles (pour vérifier certaines propriétés comme une associativité ou une distributivité, on évitera autant que possible des vérifications fastidieuses, au profit de raisonnements sans calculs).

b) Montrer que si A est une matrice inversible appartenant à T, son inverse A^{-1} appartient également à cet ensemble. Quels sont les éléments inversibles de cette algèbre ?

c) Quelle est la nature du sous–ensemble S de T constitué des matrices à éléments entiers (c'est–à–dire dans $\mathbb{Z}$) ? Examiner alors les questions analogues au b) concernant ce nouvel ensemble.

---

2) Calculer l'exponentielle de la matrice réelle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 29 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Soit E l'équation en l'inconnue complexe z définie par $z^3 + p\,z + q = 0$, où p et q sont deux réels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p, q et s, où s est un réel non nul, pour que E admette une racine non réelle de partie réelle s.

---

4) a) **Résoudre l'équation** $(1+\mathrm{i}z)^5 = (1-\mathrm{i}z)^5$ **dans le corps** $\mathbb{C}$ **des nombres complexes.**

b) **En déduire les tangentes des nombres** $\frac{\pi}{5}$ **et** $\frac{2\pi}{5}$ **que l'on mettra sous la forme** $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$ **où** n, p **et** q **sont éléments de** $\mathbb{Z}$, **puis celle du nombre** $\frac{\pi}{10}$.

---

5) **Soient deux cercles de rayons distincts** R **et** r, **respectivement centrés aux points de coordonnées** $(a,0)$ **et** $(-a,0)$ **dans un repère orthonormé.**

a) **Montrer que les droites** D **coupant ces deux cercles suivant des cordes de même longueur sont tangentes à une parabole** P **dont on donnera l'équation.**

b) **Est–ce que réciproquement toutes les tangentes à** P **répondent à la question ?**

---

6) **Soit** C **l'ensemble des points de coordonnées** (x,y) **relatives à un repère orthonormé d'un plan euclidien qui vérifient l'égalité** $|z+z^2|=1$ **où** $z=x+\mathrm{i}y$.

a) **Déterminer un polynôme** P **tel que** $P(x,y)=0$ **soit une condition nécessaire et suffisante pour que la relation ci–dessus soit vérifiée.**

b) **Déterminer le point** S **de** C **de coordonnées** $(a,0)$ **avec** $a>0$.

c) **Déterminer la valeur absolue du rayon de courbure en** S **à** C **(on pourra effectuer une translation des axes, étudier la limite du carré de l'ordonnée par la nouvelle abscisse d'un point mobile se rapprochant sur** C **de** S **et justifier l'interêt de ce calcul pour la détermination du rayon).**

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail